Correction des exercices – Cinématique et dynamique newtonienne

Ex 6 p 146

Les trois référentiels proposés sont :

*- **le référentiel terrestre** : Référentiel centré sur n'importe quel solide fixe par rapport à la surface de la Terre. Les axes du repère liés à ce référentiel sont le plus souvent deux axes horizontaux et un axe vertical par rapport à la surface : par exemple, le référentiel terrestre pourrait se définir sur un terrain de football comme centré au point de corner, et les axes du repère qui lui sont liés seraient la ligne de touche, la ligne de but et le poteau de corner.*

C'est un référentiel adapté à l'étude des mouvements de courte durée au voisinage de la surface terrestre.

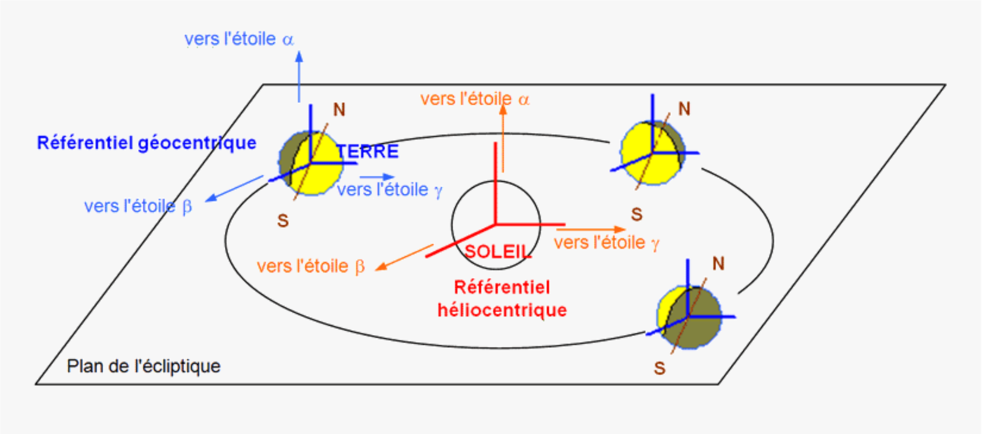
Le référentiel « laboratoire » en fait partie.

*- **le référentiel géocentrique** : Référentiel dont l'origine est le centre de gravité de la Terre. Ses axes visent 3 étoiles « fixes » (suffisamment lointaines pour sembler immobiles durant l'étude menée), et ne sont ainsi pas solidaires de la Terre dans sa rotation autour des pôles.*

C'est un référentiel adapté à l'étude des mouvements de la Lune et des satellites artificiels autour de la Terre.

*- **le référentiel héliocentrique** : Référentiel dont l'origine est le centre de masse du Soleil. Ses axes visent également 3 étoiles « fixes ».*

C'est un référentiel adapté à l'étude du mouvement des planètes et autres corps célestes en révolution autour du Soleil.



On choisit donc le référentiel terrestre pour a, b et e. Le référentiel géocentrique pour c, et le référentiel héliocentrique pour d.

Ex 7 p 146

a. Héliocentrique b. Géocentrique c. Terrestre d. Jupitocentrique

Ex 8 p 146

Rq : Les chiffres significatifs ne sont pas respectés dans ce corrigé.

1. Les vecteurs ont pour coordonnées (en m) : $\overrightarrow{OG_1}$ (5 ; 15) ; $\overrightarrow{OG_2}$ (10 ; 20) ; $\overrightarrow{OG_3}$ (22,5 ; 20)

2. On a donc, en m : $OG_1 = \sqrt{5^2 + 15^2} = 16$; $OG_2 = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22$; $OG_3 = \sqrt{22{,}5^2 + 20^2} = 30$

3. $\overrightarrow{V_2} = \dfrac{\overrightarrow{G_1G_3}}{t_3 - t_1}$ qui est égal par la relation de Chasles à $\overrightarrow{V_2} = \dfrac{\overrightarrow{OG_3} - \overrightarrow{OG_1}}{t_3 - t_1}$

Si l'on considère V_{x2} et V_{y2} les composantes (coordonnées) du vecteur $\overrightarrow{V_2}$ dans le repère, on a donc, en m.s^{-1} :

$V_{x2} = \dfrac{22{,}5 - 5}{2 \times 0{,}8}$ = 10,94 et $V_{y2} = \dfrac{20 - 15}{2 \times 0{,}8}$ = 3,13

On trouve ainsi $V_2 = \sqrt{{V_{x2}}^2 + {V_{y2}}^2} = \sqrt{10{,}94^2 + 3{,}13^2}$ = 11,4 m.s^{-1}

Ex 9 p 146

a. La bille parcourt une même distance en des intervalles de temps égaux. Sa vitesse est donc constante.

La représentation est donc incorrecte, car $V_1 \neq V_4$

b. Le vecteur vitesse n'est pas orienté dans le sens du mouvement : la représentation est incorrecte.

c. $\overrightarrow{V_6}$ devrait être tangent à la trajectoire au point 6, ce qui n'est pas le cas : c'est donc incorrect.

d. Le mouvement circulaire apparait uniforme car les points sont régulièrement espacés. Or $V_2 \neq V_4$ sur le schéma, qui est donc incorrect.

e. La représentation est cohérente, le mouvement circulaire est accéléré et $V_7 > V_5$. Les vecteurs vitesse sont bien tangents à la trajectoire aux points considérés, et orientés dans le sens du mouvement.

Ex 10 p 146

a. Le point A de la voiture parcourt une même distance en des intervalles de temps égaux. Sa vitesse est donc constante. On a alors $\overrightarrow{a_3} = \vec{0}$

b. Les points sont de plus en plus espacés, donc la vitesse augmente : $\overrightarrow{V_4}$ est plus grand que $\overrightarrow{V_2}$.

Or $\overrightarrow{a_3} = \dfrac{\overrightarrow{V_4} - \overrightarrow{V_2}}{t_4 - t_2}$ donc $\overrightarrow{a_3}$ est de même direction que l'axe et orienté dans le sens du mouvement. C'est un mouvement rectiligne accéléré.

c. Les points sont de moins en moins espacés, donc la vitesse diminue : $\overrightarrow{V_4}$ est plus petit que $\overrightarrow{V_2}$.

Or $\overrightarrow{a_3} = \dfrac{\overrightarrow{V_4} - \overrightarrow{V_2}}{t_4 - t_2}$ donc $\overrightarrow{a_3}$ est de même direction que l'axe et orienté dans le sens inverse au mouvement. C'est un mouvement rectiligne ralenti.

Ex 11 p 147

Rq : Les distances sont mesurées sur le livre, le schéma reproduit en fin de corrigé est plus grand.

1. L'échelle de distance choisie est de 0,9 cm sur le quadrillage pour 5,0 m dans la réalité.

a) Cas de $\overrightarrow{V_2}$:

La distance A_1A_3 sur le quadrillage vaut 2,2 cm, donc dans la réalité on a $A_1A_3 = \frac{2{,}2 \times 5{,}0}{0{,}9}$ = 12 m.

On a donc $V_2 = \frac{A_1A_3}{2\Delta t} = \frac{12}{2 \times 5{,}0}$ = 1,2 m.s^{-1}

On choisit pour échelle de vitesse : 4,0 cm pour 1,0 m.s^{-1}.

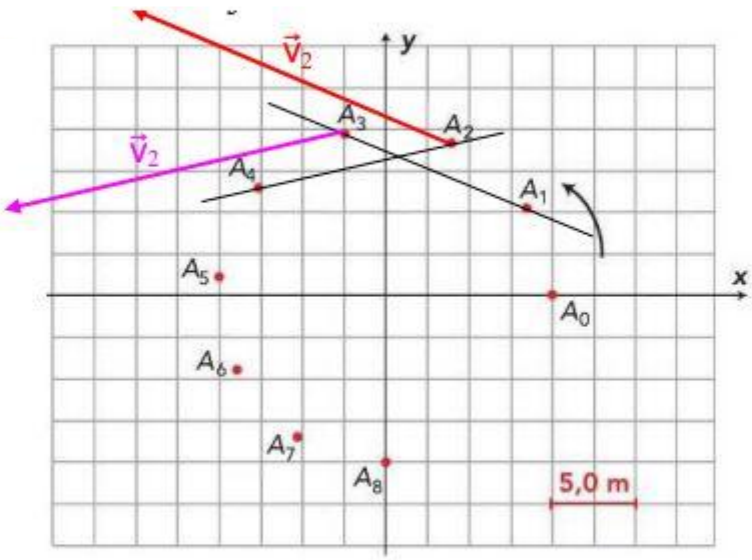
La norme du vecteur $\overrightarrow{V_2}$ sur le schéma vaut donc $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\| = 4{,}0 \times 1{,}2 =$ 4,8 cm.

On trace donc sur le schéma un vecteur $\overrightarrow{V_2}$ ayant pour origine A_2, parallèle au segment A_1A_3, orienté dans le sens du mouvement et de longueur 4,8 cm.

b) Cas de $\overrightarrow{V_3}$:

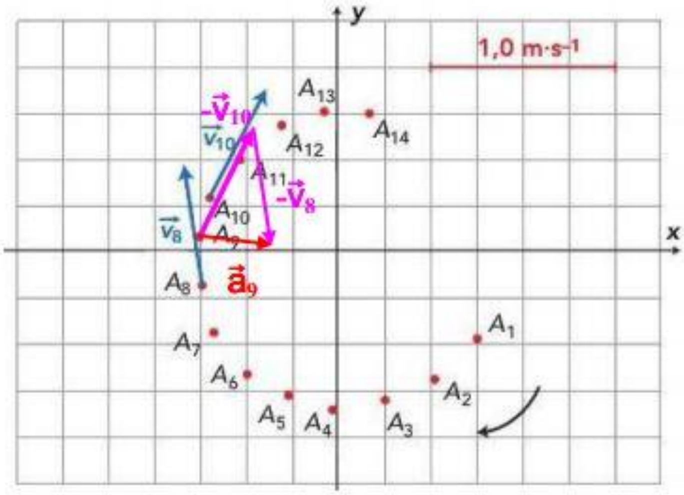
La distance $A_2A_4 = A_1A_3$. On sait donc que, en valeur, $V_2 = V_3$ = 1,2 m.s^{-1}. Avec l'échelle de vitesse choisie, on a donc aussi $\left\|\overrightarrow{V_3}\right\|$ = 4,8 cm sur le schéma.

On trace donc un vecteur $\overrightarrow{V_3}$ ayant pour origine A_3, parallèle au segment A_2A_4, orienté dans le sens du mouvement et de longueur 4,8 cm.



Ex 12 p 147

1. Schéma reproduit :



2. *Les distances sont mesurées sur le livre, le schéma ci-dessus est agrandi.*

D'après l'échelle de vitesse donnée sur le schéma (2,2 cm pour 1,0 m.s^{-1}), on trouve $\left|\overrightarrow{V_{10}} - \overrightarrow{V_8}\right|$ = 0,40 m.s^{-1}.

$a_9 = \dfrac{\left|\overrightarrow{V_{10}} - \overrightarrow{V_8}\right|}{t_{10} - t_8} = \dfrac{\left|\overrightarrow{V_{10}} - \overrightarrow{V_8}\right|}{2\Delta t} = \dfrac{0{,}40}{2 \times 0{,}50}$ = 0,40 m.s^{-2}. On peut le représenter avec une échelle d'accélération de 2,2 cm pour 1,0 m.s^{-2} par exemple.

3. $\overrightarrow{a_9}$ a pour origine le point A_9. Sa direction est un rayon du cercle : $\overrightarrow{a_9}$ est radial. $\overrightarrow{a_9}$ est orienté vers le centre du cercle : $\overrightarrow{a_9}$ est centripète. Sa valeur est a_9 = 0,40 m.s^{-2}.

Ex 14 p 147

Rq : Voir graphes du cours p 138 et 139 du livre.

1. Le système étudié est immobile au cours du temps le long de l'axe (Ox). Donc sa position sur l'axe n'évolue pas : x est constant. Sa vitesse et son accélération sont nulles.
Donc les graphes f (car x constant) et e (car a = 0) conviennent.

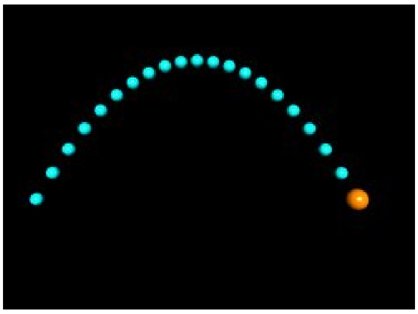
2.a. Si le système est en mouvement uniforme sur un axe (Ox), la vitesse du mobile est constante et non nulle : le graphe c convient donc. La distance parcourue par le mobile en fonction du temps est alors une fonction affine : le graphe a convient donc. Enfin, l'accélération doit rester nulle au cours du temps : le graphe e convient.
b. Si le système est en mouvement uniformément varié, l'accélération doit être constante et non nulle : le graphe b convient. La vitesse évolue donc selon une fonction affine du temps : le graphe d convient.

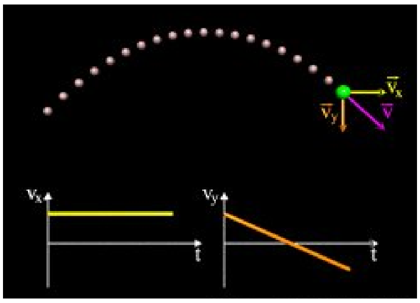
Ex 15 p 147

a. Mouvement rectiligne uniforme.
b. Mouvement rectiligne accéléré.
c. Mouvement rectiligne ralenti (ou rectiligne retardé).
d. Mouvement curviligne uniforme.
e. Mouvement circulaire uniforme.

Ex 16 p 148

1.





A t_1, on a $V_1 = \sqrt{{V_{x1}}^2 + {V_{y1}}^2} = \sqrt{2{,}0^2 + 2{,}0^2}$ = 2,8 m.s^{-1}.

A t_2, on a $V_2 = \sqrt{{V_{x2}}^2 + {V_{y2}}^2} = \sqrt{2{,}0^2 + (-2{,}0)^2}$ = 2,8 m.s^{-1}.

2. On constate que la composante V_x reste constante au cours du temps.
V_y est positive mais diminue de 0,0 s à 0,4 s, date à laquelle V_y s'annule.
D'après la formule utilisée ci-dessus, la valeur de la vitesse de la bille diminue donc de 0,0 s à 0,4 s.

Entre 0,4 s et 0,8 s, V_y est négatif et $|V_y|$ augmente. D'après la formule utilisée et puisque V_y y est porté au carré, on en déduit que la valeur de la vitesse de la bille augmente.

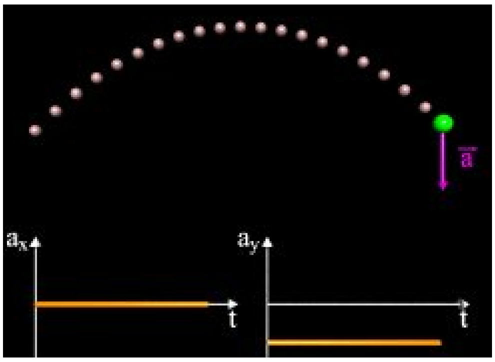
3.

$a_x = \dfrac{dV_x}{dt}$ or V_x reste constante, donc a_x = 0.

$a_y = \dfrac{dV_y}{dt}$ or $\dfrac{dV_y}{dt}$ est la pente du graphe $V_y = f(t)$.

Comme $V_y = f(t)$ est affine, on peut calculer

$$a_y = \frac{\Delta V_y}{\Delta t} = \frac{V_{y2} - V_{y1}}{t_2 - t_1} = \frac{-2{,}0 - 2{,}0}{0{,}6 - 0{,}2} = -10\,\text{m.s}^{-2}$$



4. On a à chaque instant $a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$ or a_x = 0 donc $a = a_y = -10\,\text{m.s}^{-2}$. Le vecteur accélération est vertical, orienté vers le bas.

Le mouvement de la bille est parabolique.

Ex 18 p 148

1. L'étude est menée dans le référentiel terrestre, considéré galiléen pendant la durée de l'étude.

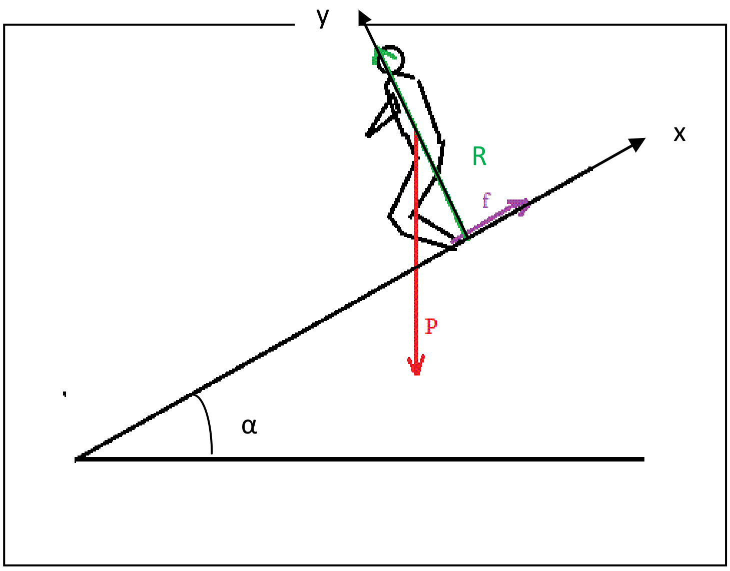
Or on sait que :

1ère loi de Newton *(Principe d'inertie) : « Dans un référentiel galiléen, le vecteur vitesse du centre d'inertie d'un système est constant si et seulement si la somme des vecteurs forces qui s'exercent sur le système est un vecteur nul. »*

D'après l'énoncé, la piste est rectiligne et la valeur de la vitesse du skieur est constante. Le mouvement du centre d'inertie du skieur est donc bien rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen. Le principe d'inertie nous permet donc de dire que la résultante des forces extérieures appliquées au système est donc un vecteur nul : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = \vec{0}$

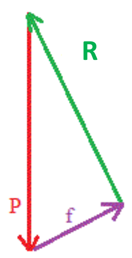
2. *Rq : Echelle du corrigé non respectée*

On choisit un repère orthonormé dont les axes (O,x) et (O,y) sont orientés comme suit :



Le vecteur $\vec{P}$ a pour valeur P = M.g = 60 x 10 = $6{,}0.10^2$ N.

Il est donc représenté sur le schéma par un vecteur vertical, orienté vers le bas de longueur 3,0 cm d'après l'échelle demandée (1 cm ↔ 200 N). Son point d'application est le centre d'inertie du skieur.



On peut construire $\vec{R}$ et $\vec{f}$ en s'appuyant sur $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = \vec{0}$ et connaissant les directions et sens des deux vecteurs. $\vec{R}$ et $\vec{f}$ sont forcément orthogonaux.

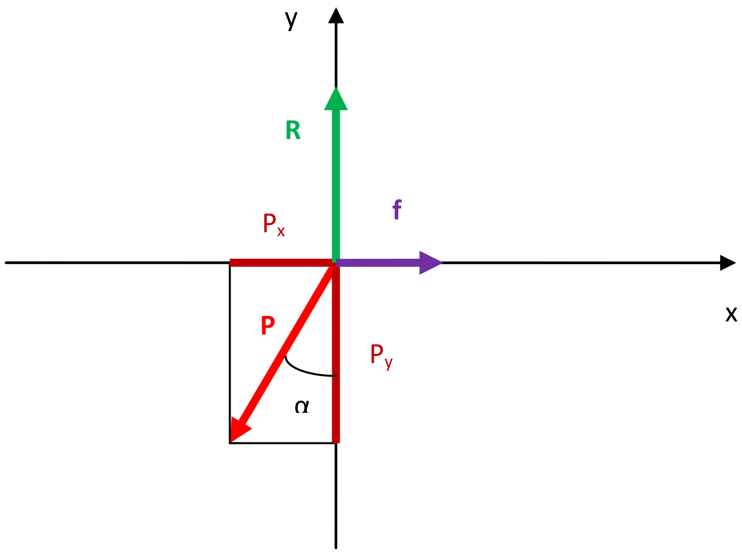
D'après la construction, on trouve que $\vec{f}$ a une longueur de 1,5 cm. L'échelle permet de conclure que f = $3{,}0.10^2$ N.

De même, on trouve que $\vec{R}$ a une longueur de 2,6 cm.

L'échelle permet d'écrire R = $5{,}2.10^2$ N.

Rq : On peut aussi calculer ces valeurs en projetant les vecteurs sur les axes du repère.

Chaque vecteur est alors décomposé en ses composantes sur (O,x) et sur (O,y) :



On a ainsi :

$\vec{P}$	$P_x = - P.\sin\alpha$ $P_y = - P.\cos\alpha$
$\vec{R}$	$R_x = 0$ $R_y = R$
$\vec{f}$	$f_x = f$ $f_y = 0$

En projetant sur chacun des axes, on obtient :

$R = - P_y = P.\cos\alpha = 6{,}0.10^2 \times \cos\alpha = 5{,}2.10^2$ N

$f = - P_x = P.\sin\alpha = 6{,}0.10^2 \times \sin 30 = 3{,}0.10^2$ N

Ex 19 p 148

a. Faux : si la voiture prend un virage, elle n'est plus en mouvement rectiligne. D'après le principe d'inertie appliqué dans le référentiel terrestre considéré galiléen, les forces qui lui sont appliquées ne se compensent donc pas.

b. Faux : La seconde loi de Newton permet d'écrire : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ et puisque $\vec{p} = m.\vec{v}$, on peut aussi écrire

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{dm.\vec{v}}{dt}$.

La masse m d'un système est toujours positive, ce n'est pas une grandeur vectorielle. Donc la résultante des forces extérieures appliquées au système est colinéaire et de même sens que le vecteur « **variation** de vitesse », mais pas forcément que le vecteur vitesse du système.

c. Faux : d'après la 3ème loi de Newton (la loi des actions réciproques), on a $\vec{F}_{véhicule/caravane} = -\vec{F}_{caravane/véhicule}$

Les deux forces ont donc même valeur.

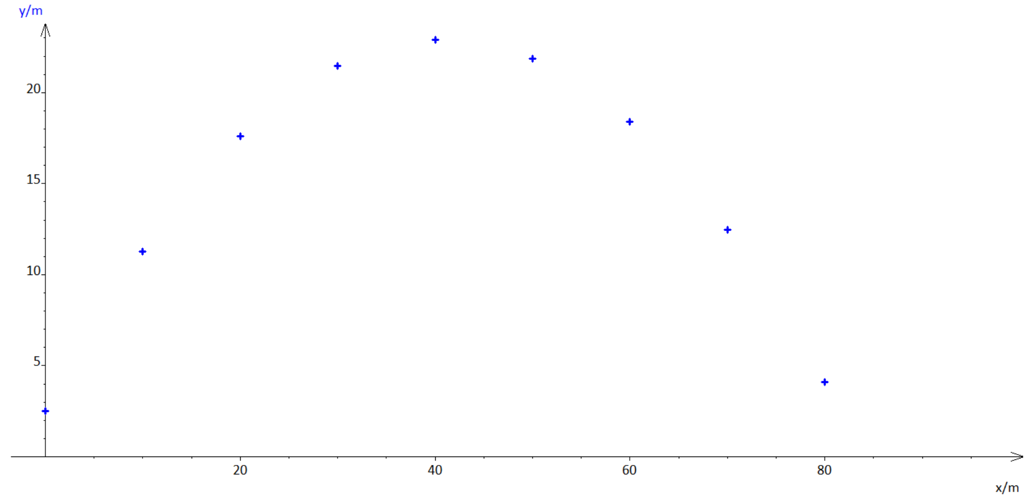
d. Vrai : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Ex 21 p 148

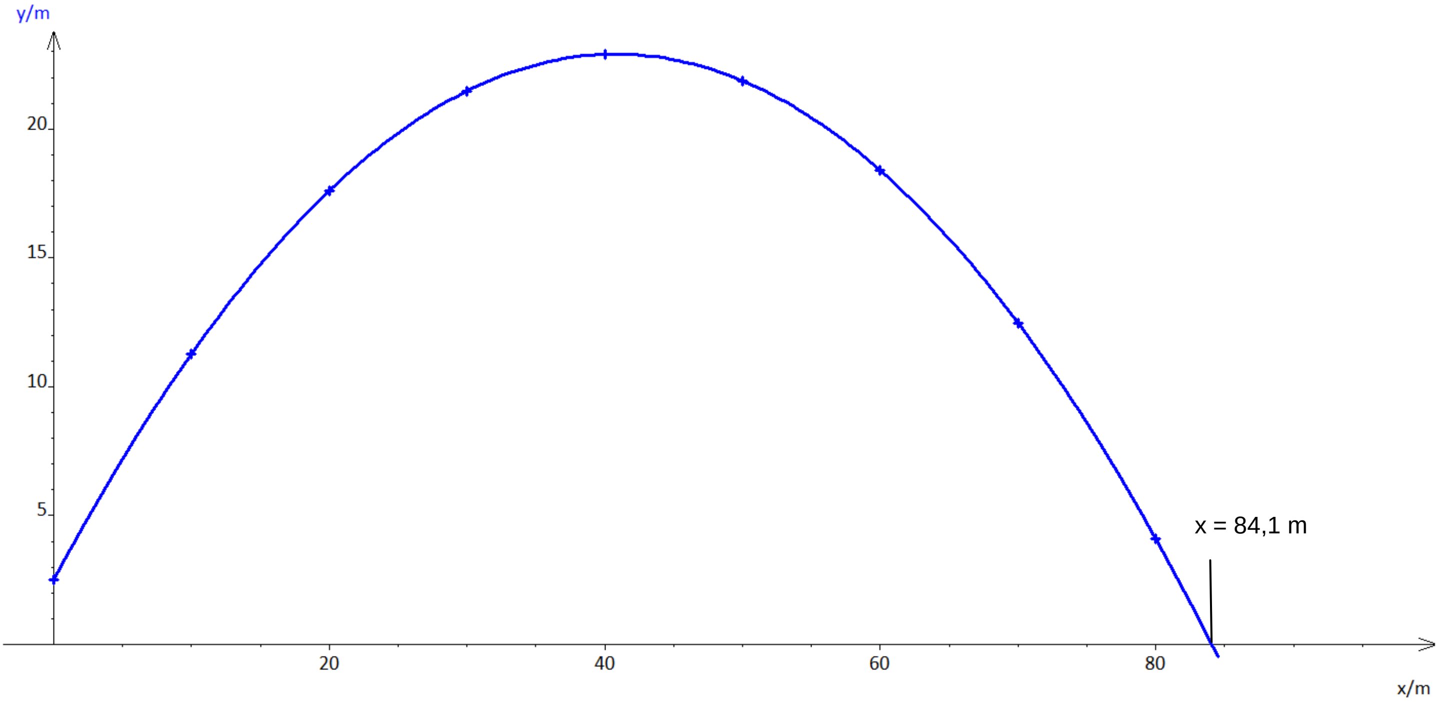
1. La trajectoire de l'homme canon est située dans le plan défini par (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) puisque la coordonnée z(t) de l'homme canon reste nulle au cours du temps.

2. On calcule les coordonnées de l'homme canon au cours du temps, et on trace $y = f(x)$:

t	x	y
	m	m
0,000	0,000	2,500
0,5000	10,00	11,28
1,000	20,00	17,60
1,500	30,00	21,48
2,000	40,00	22,90
2,500	50,00	21,88
3,000	60,00	18,40
3,500	70,00	12,47
4,000	80,00	4,100



3. En reliant les positions repérées dans le plan (O,x,y) :



On détermine qu'il faut placer le matelas en x = 84,1 donc à 84,1 m du canon.

Ex 22 p 149

1. Dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = v_x.\vec{i} + v_y.\vec{j}$

Or $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ et $v_y = \dfrac{dy}{dt}$.

D'après l'énoncé, puisque $x(t) = 20.t$ la dérivée de $x(t)$ par t donne $v_x = \dfrac{dx}{dt} = 20$ m.s^{-1}. C'est une constante.

De même, puisque $y(t) = -4{,}9.t^2 + 20.t + 2{,}5$ alors on a $v_y = \dfrac{dy}{dt} = -9{,}8.t + 20$

On peut ainsi calculer les coordonnées du vecteur vitesse de l'homme canon à chaque instant t.

2. Le tableur précédent fournit :

t	x	y	vx	vy	v
	m	m	m	m	m
0,000	0,000	2,500	20,00	20,00	28,28
0,5000	10,00	11,28	20,00	15,10	25,06
1,000	20,00	17,60	20,00	10,20	22,45
1,500	30,00	21,48	20,00	5,300	20,69
2,000	40,00	22,90	20,00	0,4000	20,00
2,500	50,00	21,88	20,00	-4,500	20,50
3,000	60,00	18,40	20,00	-9,400	22,10
3,500	70,00	12,47	20,00	-14,30	24,59
4,000	80,00	4,100	20,00	-19,20	27,72

La valeur du vecteur vitesse à t = 1 s est $v_1 = \sqrt{{v_{x1}}^2 + {v_{y1}}^2}$ d'où

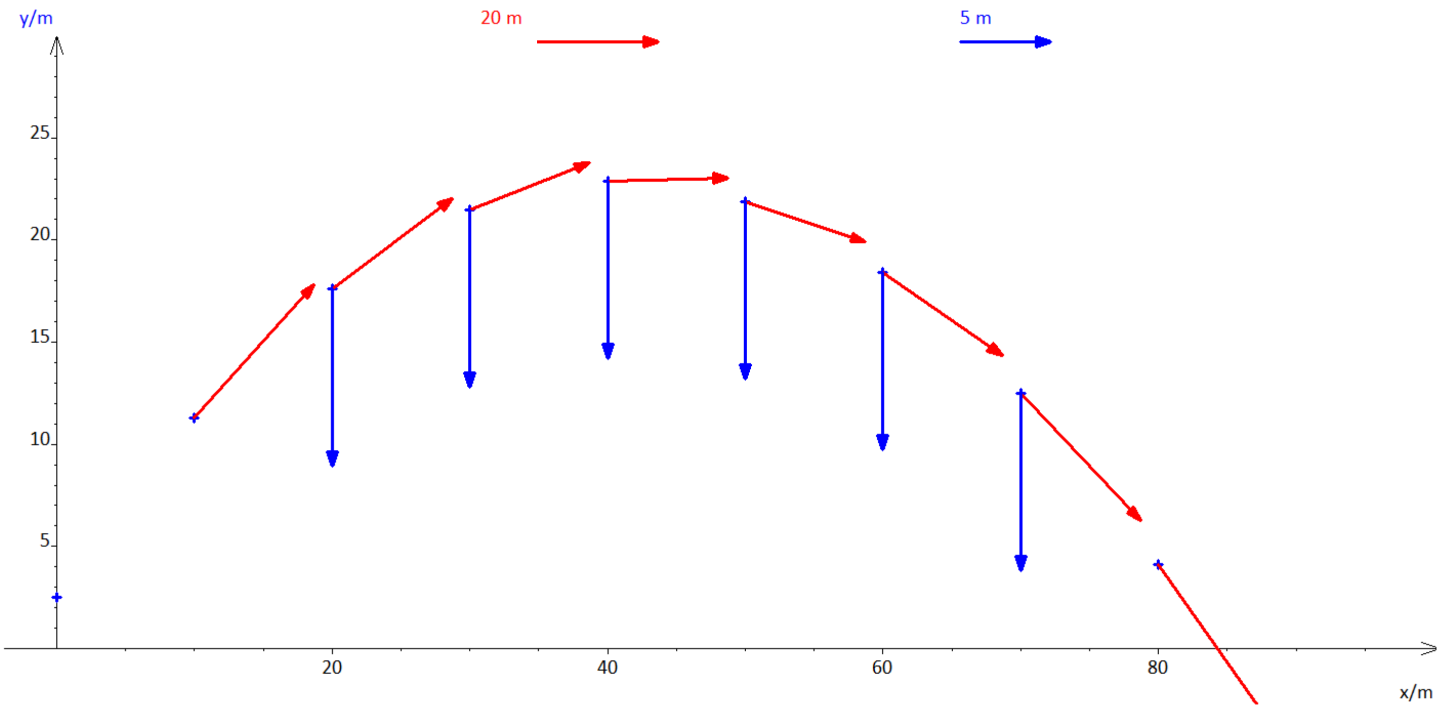
$v_1 = \sqrt{20^2 + 10{,}2^2} = 22{,}5\,\text{m.s}^{-1}$.

3. Dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), le vecteur accélération s'écrit : $\vec{a} = a_x.\vec{i} + a_y.\vec{j}$

Or $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ et $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$. On obtient donc $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0$ et $a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -9{,}8\,\text{m.s}^{-2}$ à chaque instant.

4. La valeur du vecteur accélération reste constante au cours du temps : $a = -9{,}8\,\text{m.s}^{-2}$. Le vecteur est vertical, orienté vers le bas.

20 m.s^{-1} 5 m.s^{-2}



Ex 23 p 149

1. La composante v_z étant toujours positive ou nulle sur le graphique, on en déduit que l'axe (O,z) est orienté vers le bas.

2. Durant la phase 1, la vitesse verticale du parachutiste augmente (mais de moins en moins fortement). Son mouvement est donc accéléré.

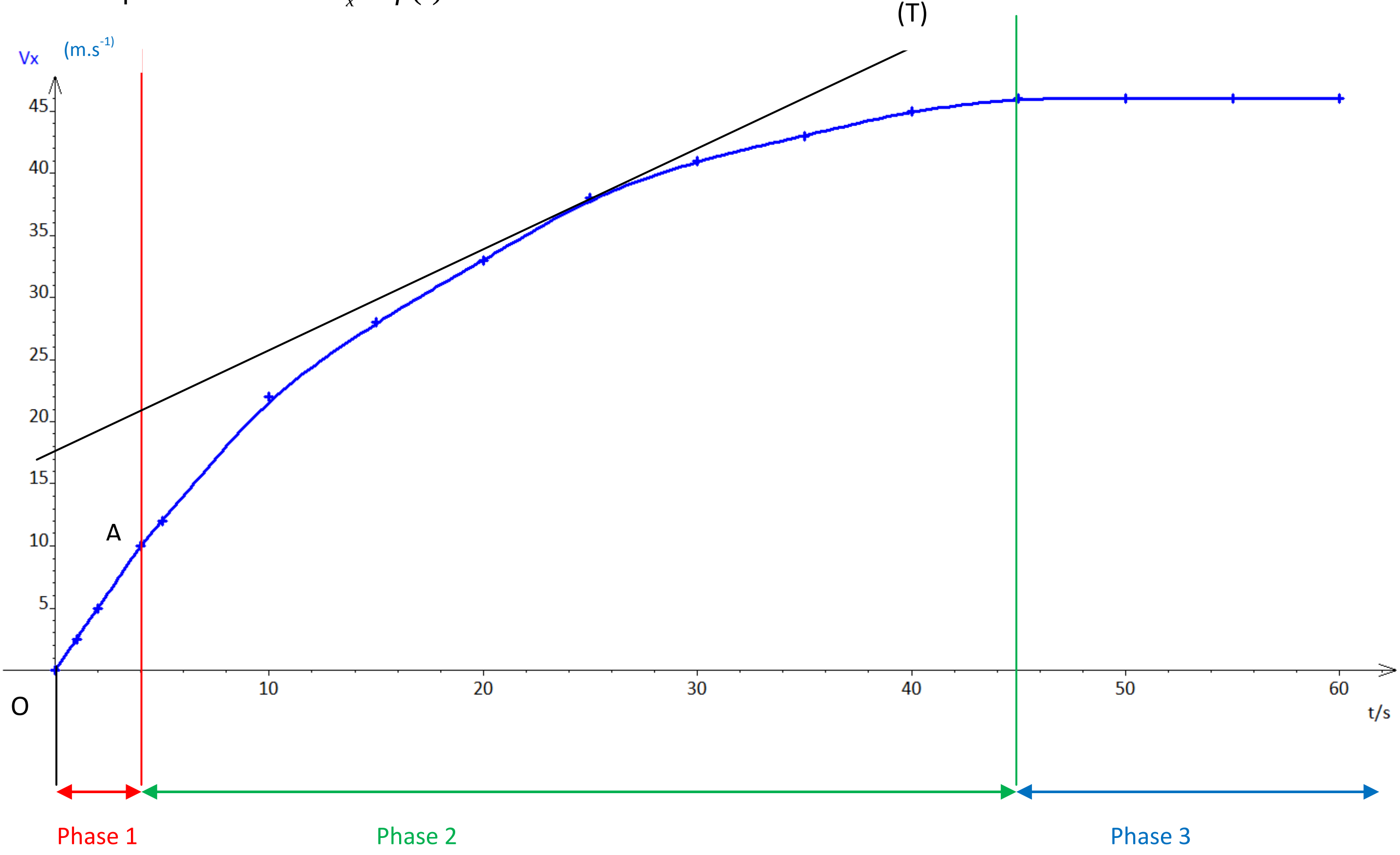
Durant la phase 2, la vitesse verticale du parachutiste reste constante. Son mouvement est donc uniforme.

Durant la phase 3, la vitesse verticale du parachutiste diminue. Son mouvement est donc ralenti.

Au début de la phase 3, le parachutiste a ouvert son parachute.

Ex 28 p 150

1.a. La représentation de $v_x = f(t)$ est :



b. Voir graphe.

- Durant la phase 1, $v_x = f(t)$ est un segment de droite passant par l'origine : v_x augmente donc linéairement.

$a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ est donc une constante positive. C'est donc une phase de mouvement rectiligne uniformément accéléré.

- Durant la phase 2, v_x augmente au cours du temps mais de moins en moins fortement. $a_x(t)$ est donc positive, mais de plus en plus petit au fur et à mesure que t augmente. C'est donc une phase de mouvement rectiligne accéléré.

- Durant la phase 3, v_x est constante. On a donc $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ = 0. C'est donc une phase de mouvement rectiligne uniforme.

2.a. On sait que $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$. Or $\dfrac{dv_x}{dt}$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe à l'instant t considéré.

Pour déterminer la valeur de a_x à un instant t, il faut donc tracer la tangente à la courbe en cet instant t et calculer son coefficient directeur.

b. Durant la phase 1, v_x augmente linéairement. On peut donc écrire que $a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ soit que a_x est égal au coefficient du segment de droite OA pris entre t = 0 et t = 4 s.

On a donc $a_x = \frac{10-0{,}0}{4-0} = 2{,}5$ m.s^{-2}.

c. On trace la tangente (T) à la courbe à t = 25 s. Les points de coordonnées (0 ; 17,5) et (25 ; 37,5) appartiennent à cette tangente. On peut donc écrire qu'à t = 25 s, on a : $a_x = \frac{37{,}5-17{,}5}{25-0} = 0{,}8$ m.s^{-2}.

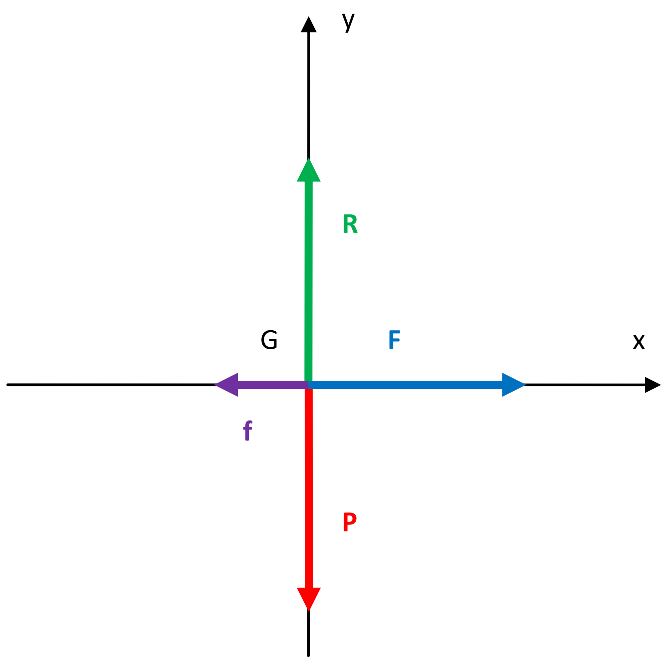
d. *Je ne saisis pas bien la question, à moins que l'énoncé ne fasse d'importants raccourcis.*

Je vais donc supposer par la suite que la route rectiligne est aussi horizontale, et que les forces de frottements sont négligeables devant la force motrice… Ce que l'énoncé ne m'autorise pas explicitement à faire.

Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, le système $\{Voiture\}$ est soumis à plusieurs forces :

- son poids $\vec{P}$, vertical
- la réaction $\vec{R}$ du sol, verticale
- la force motrice $\vec{F}$, horizontale
- les forces de frottements dont la résultante $\vec{f}$ est horizontale.

En ramenant les points d'application de ces forces au point G, centre d'inertie de la voiture :



D'après la seconde loi de Newton appliquée au système $\{Voiture\}$, on a :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ d'où, si la masse du système reste constante, $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m.\frac{d\vec{v}}{dt} = m.\vec{a}$

On a donc $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = m.\vec{a}$

En projetant cette expression :

- sur l'axe (O,x) : $R - P = 0$

- sur l'axe (O,y) : $F - f = m.a_x$

De la projection sur l'axe (O,y), et en négligeant f , on évalue que $F = m.a_x$

A t = 25 s, on a donc $F = m.a_x = 1200 \times 0{,}8 =$ 9,6.10^2 N (avec 2 chiffres significatifs, malgré l'énoncé).

L'ordre de grandeur de la valeur de la force motrice à t = 25 s serait donc de 10^3 N.

Ex 29 p 150

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré galiléen sur le système $\{Ampoule\}$ de centre d'inertie G et de masse m.

Les deux forces appliquées au système sont :

- son poids $\vec{P} = m.\vec{g}$, vertical vers le bas.

- la poussée d'Archimède $\vec{A} = -m'.\vec{g}$, verticale vers le haut. Dans cette expression, m' est la masse du fluide déplacé du fait de la présence de l'ampoule. On peut donc écrire $m' = \rho.V$ où ρ est la masse volumique du fluide – ici l'éthanol – et V le volume de fluide déplacé, donc de l'ampoule.

La poussée d'Archimède est la force particulière que subit un corps plongé en tout ou en partie dans un fluide (liquide ou gaz) soumis à un champ de pesanteur.

Cette force résulte de l'augmentation de la pression du fluide avec la profondeur : la pression est donc plus forte sur la partie inférieure de l'objet immergé que sur sa partie supérieure, d'où une poussée globale verticale orientée vers le haut.

Le principe d'Archimède s'énonce souvent ainsi : « Tout corps plongé dans un fluide au repos, entièrement mouillé par celui-ci ou traversant sa surface libre, subit une force verticale, dirigée de bas en haut et opposée au poids du volume de fluide déplacé ; cette force est appelée "poussée d'Archimède". »

1. L'ampoule est immobile dans l'éthanol. D'après la 1ère loi de Newton appliquée à l'ampoule dans le référentiel terrestre galiléen, les forces extérieures exercées sur l'ampoule se compensent donc.

On a ainsi : $\vec{P} + \vec{A} = \vec{0}$

2.a.b. Si la température augmente, la masse volumique ρ de l'éthanol diminue. Toute autre donnée restant inchangée, et puisque la valeur de la poussée d'Archimède exercée sur l'ampoule s'écrit $A = \rho.V.g$, une diminution de ρ entraine une diminution de A.

Ainsi, P > A.

La 2ème loi de Newton appliquée à l'ampoule s'écrit $\vec{P} + \vec{A} = m.\vec{a}$ puisque la masse m de l'ampoule se conserve. Et puisque P > A, le vecteur accélération $\vec{a}$ de l'ampoule sera orienté dans le sens de $\vec{P}$.

Ce qui signifie que l'ampoule va « couler ».

3. Si la température diminue, ρ de l'éthanol augmente, donc A augmente, donc A > P, donc l'ampoule monte à la surface.

4. Tout… ici : http://fr.wikipedia.org/wiki/Thermom%C3%A8tre_de_Galil%C3%A9e

Ex 33 p 152

Soit D la distance entre l'arbre et la ligne d'arrivée, et d la distance entre l'arbre et la tortue.

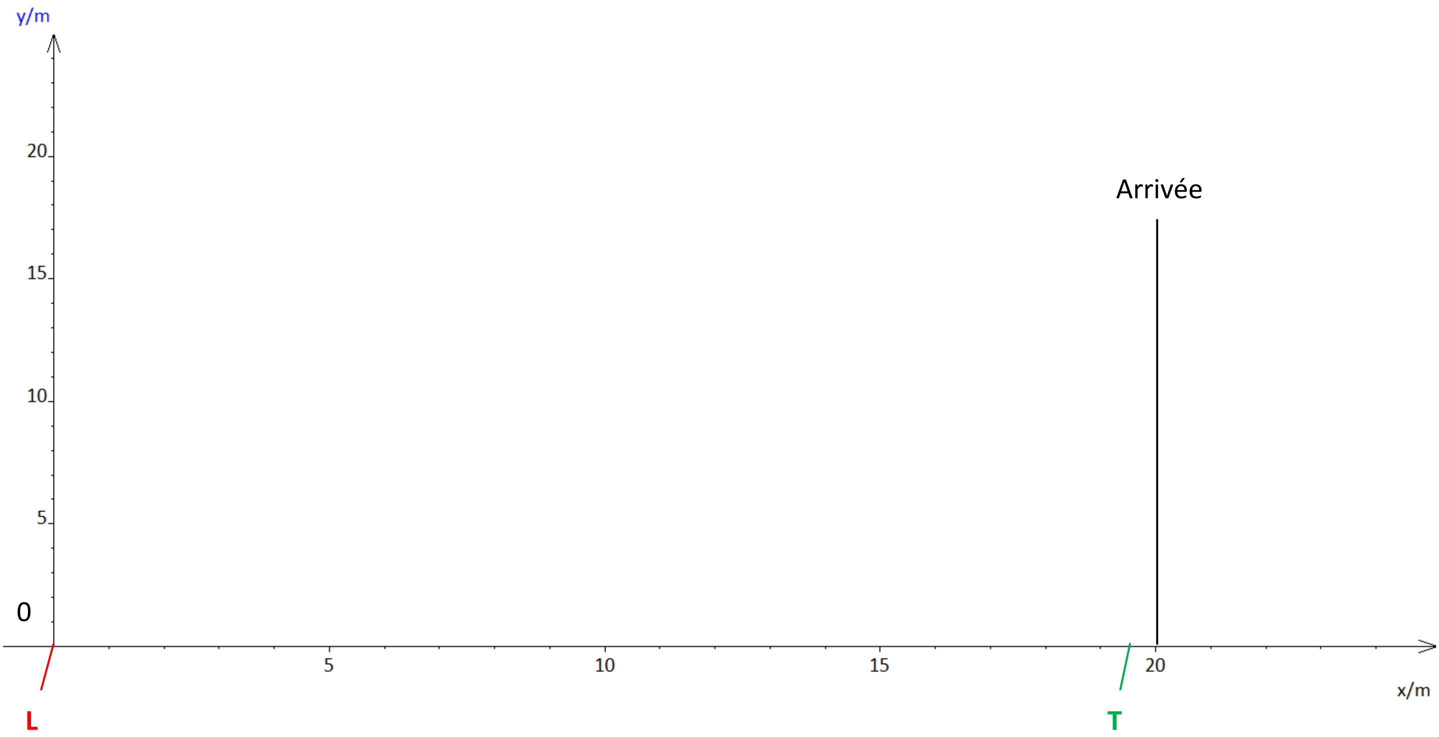
1.a. Soit t_0 la durée nécessaire à la tortue pour atteindre la ligne d'arrivée.

$v_0 = \dfrac{D-d}{t_0}$ d'où $t_0 = \dfrac{D-d}{v_0} = \dfrac{20{,}0-19{,}5}{0{,}250} = 2{,}00$ s.

b. En t_0, à la vitesse v_1, le lièvre parcourt : $d_1 = v_1 \times t_0 = 18{,}0 \times 2{,}00 = 36{,}0$ m.

A la vitesse de pointe v_1, il lui faudra moins de 2,00 secondes pour parcourir les 20,0 m qui le séparent de la ligne d'arrivée, il devrait donc gagner la course.

2. Le repère orthonormé cité est le suivant, avec T la tortue et L le lièvre à t = 0 s, date à laquelle le lièvre se met à courir.



Dans cette 1ère phase, à partir de t = 0 s, on a :

- Pour le lièvre : $a_L(t) = 9{,}00\,\text{m.s}^{-2}$ avec $\overrightarrow{a_L}\left|\begin{array}{l} a_{Lx} = 9{,}00 \\ a_{Ly} = 0 \end{array}\right.$

$a_{Lx} = \dfrac{dv_{Lx}}{dt}$ est une constante durant cette phase : On en déduit que l'expression de $v_{Lx}(t)$ est de la forme $v_{Lx} = a_{Lx}.t + C$ où C est une constante.

Comme à t = 0, $v_{Lx}(0) = 0$, il vient C = 0.

$a_{Ly} = \dfrac{dv_{Ly}}{dt} = 0$ donc $v_{Lx}(t) = C'$ avec C' une constante. Comme à t = 0, $v_{Lx}(0) = 0$, il vient C' = 0.

On peut donc écrire $\overrightarrow{v_L} \left| \begin{array}{l} v_{Lx} = a_{Lx}.t \\ v_{Ly} = 0 \end{array} \right.$

$v_{Lx} = \dfrac{dx_L}{dt} = a_{Lx}.t$. On en déduit que $x_L(t)$ est de la forme $x_L = \dfrac{1}{2} a_{Lx}.t^2 + C''$ avec C'' une constante. Comme à t = 0, $x_L(0) = 0$, il vient C'' = 0.

$v_{Ly} = \dfrac{dy_L}{dt} = 0$ d'où $y_L = C'''$ avec C''' une constante. Comme à t = 0, $y_L(0) = 0$, il vient C''' = 0.

Les équations horaires du mouvement du lièvre pendant cette phase sont donc :

$$\overrightarrow{OL} \left| \begin{array}{l} x_L = \dfrac{1}{2} a_{Lx}.t^2 = \dfrac{1}{2} a_L.t^2 \\ y_L = 0 \end{array} \right.$$

- Pour la tortue : $v_T(t) = v_0 = 0{,}250$ m.s^{-1} constante (donc $a_T(t) = 0$) avec $\overrightarrow{v_T} \left| \begin{array}{l} v_{Tx} = 0{,}250 \\ v_{Ty} = 0 \end{array} \right.$

On a donc :

$v_{Tx} = \dfrac{dx_T}{dt} = v_1$ d'où $x_T = v_{Tx}.t + k$ avec k une constante. Or à t = 0, $x_T(0) = x_{T0} = 19{,}5$ donc k = 19,5.

$v_{Ty} = \dfrac{dy_T}{dt} = 0$ d'où $y_T = k'$ avec k' une constante. Or à t = 0, $y_T(0) = 0$ donc k' = 0.

Ainsi, les équations horaires du mouvement de la tortue sont :

$$\overrightarrow{OT} \left| \begin{array}{l} x_T = v_{Tx}.t + x_{T0} = v_0.t + 19{,}5 \\ y_T = 0 \end{array} \right.$$

3. A la fin de la 1$^{\text{ère}}$ phase, le lièvre a atteint une vitesse horizontale $v_1 = 18{,}0$ m.s^{-1}.

Les équations établies à la question 2 indiquent que $v_{Lx} = a_L.t$ soit que $t = \dfrac{v_{Lx}}{a_L}$

La vitesse v_1 est atteinte à t_1 tel que : $t_1 = \dfrac{v_1}{a_L} = \dfrac{18{,}0}{9{,}00} = 2{,}00$ s.

A cet instant t_1, le lièvre a atteint l'abscisse x_1 telle que : $x_1 = \dfrac{1}{2} a_L.t_1^{\,2} = \dfrac{1}{2} \times 9{,}00 \times (2{,}00)^2 = 18{,}0$ m.

Ainsi, à la fin de cette 1$^{\text{ère}}$ phase, le lièvre a parcouru 18,0 m depuis l'arbre. Il lui reste 2,0 m à parcourir jusqu'à l'arrivée.

Mais à la même date, l'abscisse atteinte par la tortue est x_2 telle que :
$x_2 = v_0.t + x_{T0} = 0{,}250 \times 2{,}00 + 19{,}5 = 20{,}0$ m. La tortue est donc en train de franchir la ligne d'arrivée.

Le lièvre a donc déjà perdu la course, à ce moment là.

4. Durant cette phase, le lièvre a une vitesse constante $v_1 = 18{,}0$ m.s^{-1}. Il lui reste une distance X = $x_2 - x_1$ à parcourir en une durée τ tel que : $\tau = \dfrac{x_2 - x_1}{v_1} = \dfrac{20{,}0 - 18{,}0}{18{,}0} = 0{,}111$ s. Le lièvre atteindra la ligne d'arrivée avec un retard de 0,111 s sur la tortue.