Correction exercices
séquence II-2 : Mouvements de projectiles dans champs de pesanteur

Exercice 9 page 172

Système étudié : {**le boulet lancé par l'athlète**}. **Référentiel : terrestre, supposé galiléen.**
Bilan des forces extérieures qui agissent sur le système : son poids (**chute libre**)
D'après la Seconde loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a} \quad \text{d'où} \quad \vec{a} = \vec{g}$$

• On projette cette équation vectorielle sur le repère fixé par l'énoncé pour obtenir les coordonnées du vecteur accélération :

$$a_x(t) = g_x = 0$$
$$a_y(t) = g_y = -g$$

• On intègre une première fois pour connaître les coordonnées du vecteur vitesse à chaque instant :

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0$$
$$v_x(t) = cste$$
$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -g$$
$$v_y(t) = -g.t + cste'$$

Pour déterminer les constantes d'intégration, on se réfère à la seule date où l'on dispose d'informations au sujet du système étudié. A la date t=0, on connaît la vitesse du système :

$$v_{0x} = v_0.\cos\alpha$$
$$v_{0y} = v_0.\sin\alpha$$

$$v_x(0) = v_{0x} = v_0.\cos\alpha = cste$$
$$v_y(0) = v_{0y} = v_0.\sin\alpha = cste'$$

Conclusion : les coordonnées du vecteur vitesse, à chaque instant, sont :

$$v_x(t) = v_0.\cos\alpha$$
$$v_y(t) = -g.t + v_0.\sin\alpha$$

• On intègre une deuxième fois pour connaître les coordonnées du vecteur position à chaque instant :

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0.\cos\alpha$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -g.t + v_0.\sin\alpha$$

$$x(t) = v_0.\cos\alpha.t + cste$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t + cste'$$

Pour déterminer les constantes d'intégration, on exploite à nouveau les conditions initiales. A la date t=0, on connaît la position du système :

$$x(0) = 0 = cste$$

$$y(0) = h = cste'$$

Conclusion :les coordonnées du vecteur position, à chaque instant, sont :

$$x(t) = v_0.\cos\alpha.t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t + h$$

A l'aide des équations ci-dessus (équations horaires du mouvement), déterminons l'équation de la trajectoire. On isole t dans la première équation et on l'injecte dans la seconde :

$$t = \frac{x(t)}{v_0.\cos\alpha}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g.\left(\frac{x(t)}{v_0.\cos\alpha}\right)^2 + v_0.\sin\alpha.\frac{x(t)}{v_0.\cos\alpha} + h$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g.\frac{x(t)^2}{v_0^2.\cos^2\alpha} + \tan\alpha.x(t) + h$$

La proposition (B) est correcte…

9 Étudier un lancer de poids

1. a. La trajectoire d'un point est l'ensemble des positions successives occupées par ce point au cours de son mouvement. Son équation est du type $y = f(x)$.
b. La relation (C) doit être éliminée, car elle est du type $y = f(t)$.

2. a. À $t = 0$, le poids P est à une hauteur $y = h$:

$$\overrightarrow{OP_0}\begin{pmatrix}0\\h\end{pmatrix}$$

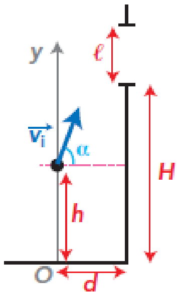
b. On élimine l'équation (A) où l'ordonnée de P à $t = 0$ est nulle.
(B) est l'équation de la trajectoire :

$$y = -\frac{1}{2}g\cdot\left(\frac{x}{v_0\cdot\cos\alpha}\right)^2 + v_0\cdot\tan\alpha + h$$

Exercice 15 page 174

15 À chacun son rythme

1. Schéma de la situation :



2. Le mouvement du système {pierre}, assimilé à un point, est étudié dans un référentiel terrestre supposé galiléen. Il n'est soumis qu'à son poids dans l'hypothèse d'une chute libre.

Sachant que la masse de la pierre ne varie pas, la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a}$$

3. Pour un axe horizontal orienté dans le sens du mouvement et un axe vertical vers le haut :

$$a_x(t) = 0 \quad \text{et} \quad a_y(t) = -g$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

donc le vecteur vitesse a pour coordonnées :

$$v_x(t) = C_x \quad \text{et} \quad v_y(t) = -g \cdot t + C_y$$

Sachant qu'à $t = 0$:

$$v_x(0) = v_i \cdot \cos\alpha \quad \text{et} \quad v_y(0) = v_i \cdot \sin\alpha,$$

il vient, par identification :

$$v_x(t) = v_i \cdot \cos\alpha \quad \text{et} \quad v_y(t) = -g \cdot t + v_i \cdot \sin\alpha.$$

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, une seconde intégration donne les équations horaires :

$$x(t) = v_i \cdot \cos\alpha \cdot t + D_x$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_i \cdot \sin\alpha \cdot t + D_y$$

Sachant qu'à $t = 0$, $x(0) = 0$ et $y(0) = h$, il vient, par identification :

$$x(t) = v_i \cdot \cos\alpha \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_i \cdot \sin\alpha \cdot t + h$$

On retrouve les équations proposées.

4. L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant le temps dans la combinaison des équations horaires :

$$t = \frac{x}{v_i \cdot \cos\alpha}$$

d'où :

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_i^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 + \tan\alpha \cdot x + h$$

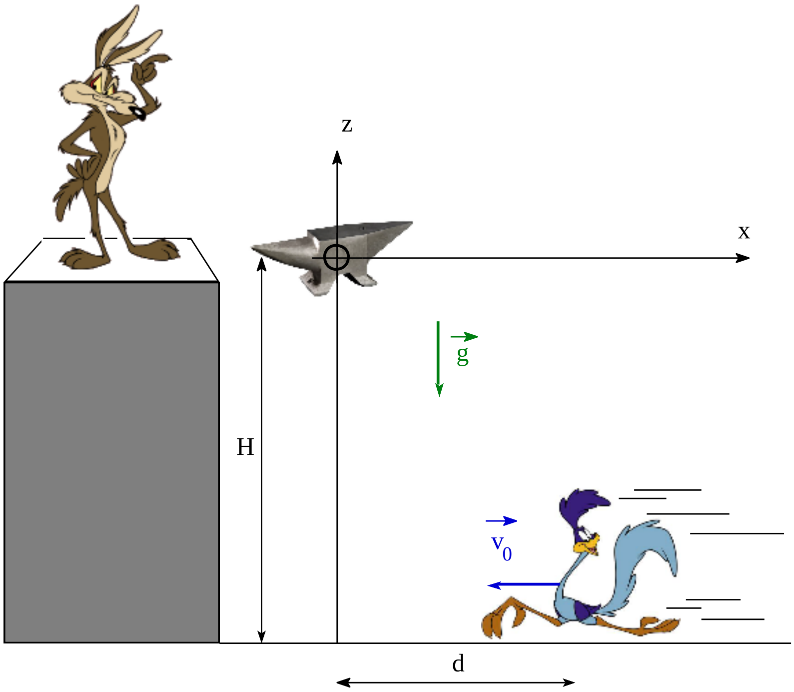
5. On calcule l'ordonnée du point atteint par le caillou quand son abscisse est égale à $d = 2{,}0$ m :

$$y(2{,}0) = \frac{-9{,}8 \times 2{,}0^2}{2 \times 10^2 \times \cos^2(60°)} + \tan 60° \times 2{,}0 + 2{,}0$$

$$y(2{,}0) = 4{,}7 \text{ m.}$$

Le bas de la fenêtre étant à 4,5 m au-dessus du sol et sa hauteur égale à 1,0 m, la pierre atteindra bien la fenêtre de Juliette.

Exercice 16 page 174



1 . Schéma de la situation initiale :

Le système étudié est l'enclume.
Le référentiel utilisé est terrestre, supposé galiléen.

A la date t=0, le système est en O. Sa vitesse initiale est nulle.

2.a. Equations horaires du mouvement :

L'enclume est soumise à son poids. On a donc d'après la 2ème loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a}$$

Donc

$$\vec{a} = \vec{g}$$

On projette cette équation vectorielle sur les axes du repère (O,x,z) :

$$a_x(t) = g_x = 0$$
$$a_y(t) = g_y = -g$$

On intègre une première fois :

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0$$
$$v_x(t) = cste$$
$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = -g$$
$$v_y(t) = -g.t + cste'$$

On exploite les conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration :

$$v_x(0) = v_{0x} = 0 = cste$$
$$v_y(0) = v_{0y} = 0 = cste'$$

Conclusion : les coordonnées du vecteur vitesse sont :

$$v_x(t) = 0$$
$$v_y(t) = -g.t$$

On intègre une seconde fois :

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 0$$
$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -g.t$$
$$x(t) = cste$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + cste'$$

On exploite les conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration :

$$x(0) = 0 = cste$$
$$y(0) = 0 = cste'$$

Conclusion : les coordonnées du vecteur position sont :

$$x(t) = 0$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}g.t^2$$

2.b. Le mouvement du système {enclume} est rectiligne et uniformément accéléré (chute libre verticale, sans vitesse initiale).

3. Durée de chute de l'enclume : à quelle date t_S l'enclume touche-t-elle le sol ? Le système touche le sol lorsque $y(t_S) = 0$

$$t_S = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2.30,0}{9,81}} = 2,47s$$

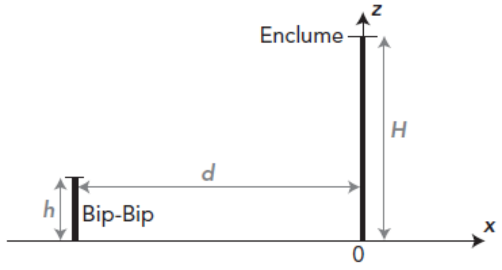
4. Mouvement de « Bip Bip » dans le référentiel terrestre : mouvement rectiligne uniforme.
5. Calculons la distance parcourue par « Bip Bip » pendant les 2,47 secondes de chute de l'enclume.

$$D = v_0.t_S = \frac{110.10^3}{3600}.2,47 = 75,5m.s^{-1}$$
$$D > d$$

« Bip Bip » est le plus rapide…

16 Manquera, manquera pas ?

1. Schématisation de la situation à la date initiale :



2. a. Système {enclume} assimilée à son centre de gravité G. On choisit l'origine du repère au niveau du sol et on oriente l'axe vertical (Oz) vers le haut. L'enclume est soumise à son poids et, en négligeant toute autre force, la deuxième loi de Newton conduit, dans ce référentiel galiléen, à $\vec{a} = \vec{g}$.

Une première intégration donne :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \cdot t \end{pmatrix}$$

Une seconde intégration donne :

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{2} \cdot t^2 + H \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur position sont les équations horaires du mouvement.

b. Il s'agit d'un mouvement rectiligne, uniformément accéléré.

3. La chute est terminée à t_f lorsque $z(t_f) = 0$, soit :

$$0 = -\frac{g}{2} \cdot t_f^2 + H$$

$$t_f = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

L'application numérique donne :

$$t_f = \sqrt{\frac{2 \times 30{,}0}{9{,}81}} = 2{,}47 \text{ s.}$$

4. Dans le référentiel terrestre choisi, le mouvement de Bip-Bip est rectiligne uniforme. Sa vitesse v_0 est constante.

5. Soit t_B la date à laquelle l'enclume atteint la cote $z = h$ (c'est la cote correspondant à la hauteur de Bip-Bip) :

$$t_B = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

$$t_B = \sqrt{\frac{2 \times 28{,}8}{9{,}81}} = 2{,}42 \text{ s.}$$

Or, le temps mis par Bip-Bip pour atteindre l'endroit où tombera l'enclume est :

$$t_E = \frac{d}{v_0}, \text{ avec } v_0 = 30{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t_E = \frac{50{,}0}{30{,}6} = 1{,}64 \text{ s.}$$

$t_B > t_E$, donc Bip-Bip est passé au point de chute avant que l'enclume ne l'atteigne. Il ne se fait pas assommer.

Pour aller plus loin

24 Le hockey sur gazon

1. Le mouvement de la balle est étudié dans le réfé rentiel terrestre supposé galiléen associé au repèr (O; x, z).
Coordonnées du vecteur $\vec{v_B}$ à $t = 0$ s :

$$\begin{pmatrix} v_{Bx} = v_B \cdot \cos\alpha \\ v_{Bz} = v_B \cdot \sin\alpha \end{pmatrix}$$

2. Coordonnées du vecteur position à $t = 0$ s :

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x_B = 0 \\ z_B = h \end{pmatrix}$$

3. La balle n'est soumise qu'à son poids, don d'après la deuxième loi de Newton :

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Par projection dans le repère (O;x, z), on obtient :

$$\vec{a}\begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{pmatrix}$$

Par intégration, étant donné les conditions initiales :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = v_B \cdot \cos\alpha \\ v_z = -g \cdot t + v_B \cdot \sin\alpha \end{pmatrix}$$

4. Quel que soit le point de la trajectoire, les coordonnées du vecteur vitesse en ce point sont :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = v_B \cdot \cos\alpha \\ v_z = -g \cdot t + v_B \cdot \sin\alpha \end{pmatrix}$$

La coordonnée horizontale du vecteur vitesse, $v_x = v_B \cdot \cos\alpha$, est une constante qui ne dépend pas de la position du point G.
Au sommet S de la trajectoire, le vecteur vitesse de la balle est horizontal, donc $v_{Sz} = 0$.
La norme du vecteur vitesse au point S est alors :

$$v_S = \sqrt{v_{x_S}^2 + v_{y_S}^2} = v_{x_S} = v_B \cdot \cos\alpha$$

Ainsi $v_S = v_B \cdot \cos\alpha = 14{,}0 \times \cos(30)$
$v_S = 12{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

5. $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$

Par intégration, et en tenant compte des conditions initiales $x(0) = x_B = 0$ et $z(0) = z_B = h$, on obtient :

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = v_B \cdot \cos\alpha \cdot t + x_B \\ z = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_B \cdot \sin\alpha \cdot t + z_B \end{pmatrix}$$

soit : $$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x = v_B \cdot \cos\alpha \cdot t \\ z = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_B \cdot \sin\alpha \cdot t + h \end{pmatrix}$$

6. Équation de la trajectoire : on isole le temps « t » de la première équation que l'on reporte dans l'expression de z :

$$t = \frac{x}{v_B \cdot \cos\alpha}$$

donc :

$$z = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_B \cdot \cos\alpha}\right)^2 + (v_B \cdot \sin\alpha) \cdot \frac{x}{v_B \cdot \cos\alpha} + h$$

Finalement :

$$z = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_B \cdot \cos\alpha}\right)^2 + \tan\alpha \cdot x + h$$

C'est une équation de parabole.

7. Pour que le but soit marqué, il faut, pour $x = d$, que $0 \leqslant z(d) \leqslant L$.
Pour $x = d = 15$ m :

$$z(d) = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{d}{v_B \cdot \cos\alpha}\right)^2 + \tan\alpha \cdot d + h$$

$$z(d) = -\frac{1}{2} \times 9{,}8 \times \left(\frac{15{,}0}{14{,}0 \times \cos 30}\right)^2 + \tan 30 \times 15{,}0 + 0{,}40$$

$$z(d) = 1{,}6\ \text{m}.$$

On a donc bien $0 \leqslant z(d) \leqslant L$, avec $L = 2{,}14$m.
Le but est marqué.